

文章编号:1001-5078(2018)10-1307-07

· 图像与信号处理 ·

增广拉格朗日双边全变分压缩成像重构算法

高宇轩¹, 孙华燕², 张廷华²

(1. 航天工程大学研究生院, 北京 101416; 2. 航天工程大学电子与光学工程系, 北京 101416)

摘要:针对基于全变分压缩成像算法重构的图像存在虚假边界以及边缘信息对比度低的问题,提出了一种基于全变分成像模型的增广拉格朗日双边全变分压缩成像重构算法。在全变分正则化思想基础上引入双边滤波技术,并加入拉格朗日函数算子,将目标函数转化为增广拉格朗日函数,利用交替方向法求解函数模型的最优解。迭代过程中选用最速下降法对梯度进行求解,对算法进行优化,提高算法运行速度。实验结果表明,算法改进后可以更加精确的重构出原始图像,重构图像的峰值信噪比提高2 dB,重构错误率降低10%,结构相似度提高0.1,并且对噪声具有较好的鲁棒性。

关键词:全变分;双边全变分;增广拉格朗日;交替方向法

中图分类号:TP391.41 **文献标识码:**A **DOI:**10.3969/j.issn.1001-5078.2018.10.020

Augmented Lagrangian bilateral total variation compression imaging reconstruction algorithm

GAO Yu-xuan¹, SUN Hua-yan², Zhang Ting-hua²

(1. College of Graduate, Space Engineering University, Beijing 101416, China;

2. Department of Electronics and Optical Engineering, Space Engineering University, Beijing 101416, China)

Abstract: In order to solve the problem that the reconstructed image based on the total variation compression image reconstruction algorithm has a fictitious boundary and low contrast of the edge information, an augmented Lagrangian bilateral total variation compression reconstruction algorithm based on the total variation is proposed. Based on the idea of total variation regularization, the bilateral filtering technique is introduced and the augmented Lagrangian function operator is added. The minimum value of the Lagrangian function model is solved by the alternating direction method. In the iterative process, the steepest descent method is adopted to solve the gradient, and the algorithm has been optimized to improve the algorithm running speed. The experimental results show that the improved algorithm can reconstruct the original image more accurately. The peak signal-to-noise ratio of the reconstructed image increases by 2dB, the reconstruction error rate decreases by 10% and the structural similarity increases 0.1, and has the better robustness to noise.

Key words: total variation; bilateral total variational; augmented Lagrangian function; alternating direction method

1 引言

压缩感知(Compressive Sensing, CS)^[1-2]理论的出现使得基于稀疏表示的图像非线性重建得到广泛

关注,该理论表明如果信号在某个变换域上是稀疏的或可稀疏表示,就可通过一个与该稀疏变换矩阵 Ψ 不相关的测量矩阵 Φ 将高维信号投影到低维空

基金项目:国家重点研发计划专项项目资助。

作者简介:高宇轩(1993-),女,硕士研究生,主要从事空间光学测量与压缩编码成像方面的研究。

收稿日期:2018-03-08; **修订日期:**2018-03-20

间。这些投影包含了重构图像所需要的大部分信息,因此可以通过求解稀疏最优化问题从低维观测向量精确地重构出原始目标图像。

目标图像的稀疏重构是从低维观测信号中恢复出高维信号的过程,是一个典型的病态或不对称反问题。目前,重构算法主要包括贪婪算法和凸优化算法两大类。贪婪算法是解决基于 l_0 范数最小化模型提出的经典重构算法,典型算法有 MP^[3] 算法和 OMP^[4] 算法、分段正交匹配追踪 (StOMP)^[5] 算法和压缩采样匹配追踪 (CoSaMP)^[6] 算法等。凸优化算法是将信号恢复问题从求解 l_0 范数问题转化成为求解最小 l_1 范数的凸优化问题,比较具有代表性的凸优化算法有基追踪 (BasisPursuit, BP)^[7] 算法、内点法、稀疏梯度投影算法^[8] 和全变分 (Total Variation, TV) 算法^[9] 等,其中 TV 算法在图像重构中的应用较为广泛。但是,目前的 TV 算法^[10-11] 仍然存在图像高频边缘信息保持较差或目标函数求解效率较低等问题。

本文在 TV 算法的基础上,提出了增广拉格朗日双边全变分重构算法 (BTV minimization scheme based on augmented Lagrangian and alternating direction algorithms, BTVAL3), 首先引入双边滤波保持图像边缘特性,然后将目标函数转化为增广拉格朗日函数,利用交替方向法求解函数模型的最优解,并在迭代过程中选用最速下降法优化了目标函数求解效率。

2 TV 算法

TV 算法是 Candes 等人从稀疏性在绝大多数自然图像的离散梯度向量中都能得到满足的角度出发,通过对梯度的稀疏性进行描述并求解,提出的一种适合二维图像压缩重构的算法。它通过计算图像梯度之和作为一个平滑处理的参考量。TV 正则项可以表示为:

$$\min \|x\|_{TV} = \min_x \sum_i \|D_i x\| \quad \text{s. t.} \quad y = \Phi x \quad (1)$$

其中, x 是原始图像; $D_i x$ 代表对图像每个像素横向和纵向进行离散梯度计算。 Φ 是测量矩阵; y 是 x 通过 Φ 得到的测量值。 $\|\cdot\|$ 算子可以是 l_1 范数或者是 l_2 范数,分别对应各项异性的 TV 和各项同性的 TV。 l_2 范式会减少恢复出来的图像的锯齿边界,默认选择 l_2 范式,这是一个典型的有约束的最优化问题。

基于 TV 算法对图像进行重构时,一般情况下利用 $TV_{l_1 l_2}$ 作为衡量图像离散梯度值的标准^[12], 定义为:

$$TV_{l_1 l_2} = \sum \sqrt{\|D_h x\|^2 + \|D_v x\|^2} = \sum_{i,j} \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (x_{i,j+1} - x_{i,j})^2} \quad (2)$$

其中, D_h 和 D_v 依次代表梯度操作子在水平与垂直方向的取值; x 代表输入图像。如果用 (i, j) 代表 x (维数为 $M \times N$) 中某一像素点的位置信息 ($1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$), 则水平和垂直方向的梯度可依次描述为:

$$D_h x_{i,j} = \begin{cases} x_{i+1,j} - x_{i,j}, & 1 \leq i < M \\ x_{1,j} - x_{i,j}, & i = M \end{cases} \quad (3)$$

$$D_v x_{i,j} = \begin{cases} x_{i,j+1} - x_{i,j}, & 1 \leq j < N \\ x_{i,1} - x_{i,j}, & j = N \end{cases} \quad (4)$$

上述算法中,对离散梯度的标准定义格式如图 1 所示,图 1(a) 描述了图像中任一像素点的梯度标准格式,图 1(b) 和图 1(c) 分别代表所有像素的梯度分别在水平和垂直方向上的定义。

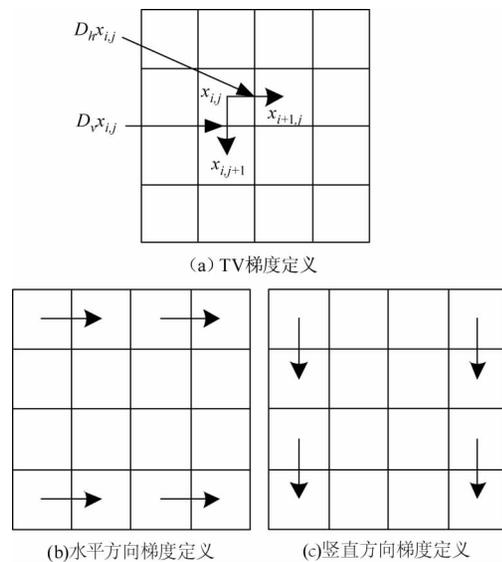


图 1 梯度定义

Fig. 1 The definition of gradient

TV 算法在重构过程中对图像全域搜索,需要对每个像素进行横向与纵向的梯度求解,这在一定程度上会造成图像边缘信息与平滑区域内的噪声混淆,因而出现边缘信息退化、对比度降低等现象。

3 BTVAL3 算法

3.1 双边全变分正则化

双边滤波同时考虑像素点的空域信息和值域信

息,对图像边缘等高频信息保存结果较好,能够解决 TV 算法中存在的边缘信息退化、对比度降低等问题。将双边滤波应用于全变分,既有对图像像素之间的空间关系的约束,也有对像素间的灰度关系的约束^[11],与 TV 正则化算法相比,能够在抑制噪声的同时进一步去除图像中的虚假边界,更好地保持图像的边缘特性^[10]。双边全变分正则化函数项可以表示为:

$$Y_{\text{BTV}}(x) = \sum_{l=-p}^p \sum_{m=0}^p \alpha^{|l|+|m|} \|x - S_h^l S_v^m x\|_1 \quad (5)$$

其中, $\|x - S_h^l S_v^m x\|_1$ 代表 x 在不同尺度上的差分;矩阵算子 S_h^l 表示对图像 x 在水平方向平移 l 个像素; S_v^m 表示图像 x 在垂直方向上移动 m 个像素。 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 为权值系数,表示空间距离对权值的影响,控制着正则项的权重。权系数 α 的大小对重构图像的局部细节信息的保持具有重要影响:当 α 取值较小时图像会包含较大的噪声,但是在图像边缘的锐化方面有较大的好处;反之,当 α 取值较大时,能够有效的抑制噪声对重建的影响,但会造成图像边缘模糊,因此选取适当的 α 值大小是非常重要的^[13]。 p 为双边滤波核尺寸大小,即最大位移量,其值过小会影响重建效果,其值过大则会增大计算量。

双边全变分正则化算子本质上就是将点 (i,j) 的像素值与其 $p \times p$ 范围邻域内的其他像素点的像素值之差以一定比例反馈到该点。双边滤波具有较好的边缘保持功能^[14]。双边全变分差分定义如图 2 所示。

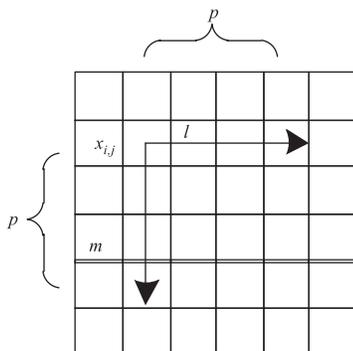


图2 BTV 差分定义

Fig.2 The gradient definition of BTV

双边全变分正则化方法是对其他常用正则化方法的推广^[12],如果限制 m 和 l 在 $m = 1, l = 0$ 或者

$m = 0, l = 1$ 并且 $\alpha = 1$ 这两种情况时,可以定义算子 Q_h 和 Q_v 作为一阶导数($Q_h = x - S_h, Q_v = x - S_v$),那么上式就可以表示为:

$$Y_{\text{BTV}}(x) = \|Q_h x\|_1 + \|Q_v x\|_1 \quad (6)$$

从上式中可以看出,与 TV 算法的表达式相一致,也就是说 TV 算法是双边全变分算法的一种特殊形式。

双边全变分预先设定窗口尺寸,每个像素的梯度求解过程仅在已设定的窗口范围内在水平和竖直方向同时梯度求解,这在很大程度较好地保持了图像的边缘特征以及细节信息。其中,参数的选择受主观影响较大^[15],对算法的重构性能以及算法的运行速度有一定的影响。

根据以上分析可知,BTVAL3 算法压缩成像重构模型则可以表示为:

$$\hat{x} = \frac{1}{2} \| \Phi x - y \|_p^p + \lambda Y_{\text{BTV}}(x) \quad (7)$$

式(7)中第一项 $\frac{1}{2} \| \Phi x - y \|_p^p$ 为数据保真项,用来衡量重构图像与原始图像的拟合程度。 p 值可取 1 或者 2,当 p 取 1 时对误差做 l_1 范数估计,对去除拉普拉斯分布类噪声有较好效果;当 p 值取 2 时,即对误差做 l_2 范数估计,对去除高斯分布类噪声效果较好^[16],实际应用中通常取 l_2 。第二项为正则项,表示对重构图像正则性的约束。 λ 为正则化参数,控制着数据保真项与正则项的相对贡献量,即权重。若 λ 取值过大,图像高频信息衰减较大,图像细节信息缺失,重建图像过于平滑;若 λ 取值过小,图像的保真度过高。

3.2 基于增广拉格朗日函数的目标函数求解

目标函数式(7)不可微并且非线性,无法进行直接求解。Rockafellar^[17]提出的全局收敛性定理指出在每一步迭代过程中,即使不对子问题进行精确求解也能达到全局收敛。因此,本文将目标函数等价转化成一系列无约束子问题,将拉格朗日算子应用于目标函数的求解过程,目标函数的求解问题即可转化为最小化增广拉格朗日函数的问题。由式(1)和式(5)可得,BTVAL3 算法中的目标函数可以表示为:

$$\begin{aligned} & \min_{g_i, x} \sum_{l=-p}^p \sum_{m=0}^p \alpha^{|l|+|m|} \|g_i\| \\ & \text{s. t. } \Phi x = y \ \& \ g_i = x - S_h^l S_v^m x \end{aligned} \quad (8)$$

设 $T_i x = x - S_h^l S_v^m x$, 那么, BTVAL3 算法对应的增广拉格朗日函数可以表示为:

$$L_A(g_i, x) = \sum_{l=-p}^p \sum_{m=0}^p \alpha^{|l|+|m|} \cdot \left(\|g_i\| + \frac{\beta_i}{2} \|T_i x - g_i\|_2^2 - w_i^T (T_i x - g_i) \right) - \lambda^T (\Phi x - y) + \frac{\mu}{2} \|\Phi x - y\|_2^2 \quad (9)$$

在求解增广拉格朗日函数的过程中需要高效地解决每一步迭代过程中的子问题, 本文采用交替方向最小化方法克服子问题的非可微性及非线性。假设 x^k 和 $g_{i,k}$ 是第 k 次迭代子问题的最优解, 进而可以求得 $g_{i,k+1}$ 。由于求解过程非常复杂, 因此选用梯度下降法来迭代求解式, 在每次迭代过程中, 梯度下降法都要更新梯度方向, 数据较大的情况下, 运算代价非常大。因此, 选用近似解 x_k 作为起点, 只进行一次梯度下降算法, 求得 x_{k+1} 。最后判断是否满足初始阈值, 停止迭代, 输出结果。利用增广拉格朗日函数算子求解目标函数流程图如图 3 所示。

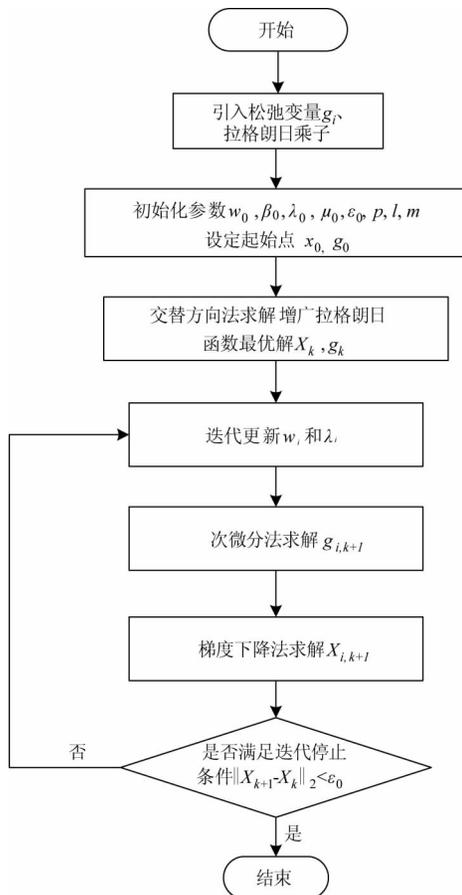


图 3 求解目标函数流程图

Fig. 3 The flow chart of solving objective function

4 仿真实验分析

为了验证 BTVAL3 算法相对于改进前的全变分算法的重构性能, 进行仿真实验分析。实验以 MATLAB_2014a 为平台, 选用 Building 标准图像作为测试图像, 以高斯随机测量矩阵为编码方式。实验结果以峰值信噪比 PSNR 值、重构错误率 ERROR 和结构相似度 SSIM 为评价标准。其中, PSNR 值越大越好、ERROR 值越小越好、SSIM 值介于 $[0, 1]$ 之间, 越接近 1 越好。由于测量率和噪声水平对重构算法性能都有较大的影响, 因此实验比较分析了算法在不同测量率、不同噪声水平下的重构性能。为了避免实验结果的偶然性, 取 10 次仿真结果的平均值作为最终实验结果。

4.1 各算法在不同测量率下的重构结果

为了分析本文提出的 BTVAL3 算法的重构性能, 本文将典型的 OMP 算法、SP 算法、CoSaMP 算法、IRLS 算法、TVAL3 算法进行比较。以 PSNR、ERROR、SSIM 为评价标准, 各种算法在不同测量率下对 Building 图像的重构结果分别如图 4~6 所示。

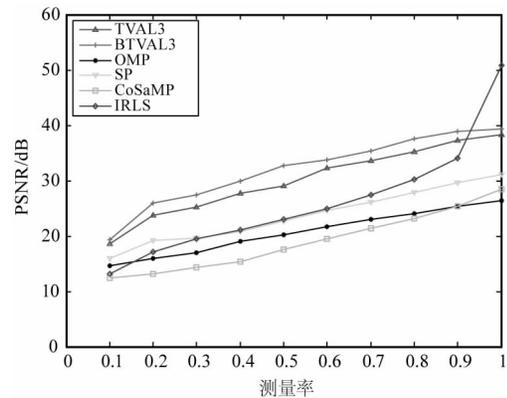


图 4 各算法重构图像 PSNR 值

Fig. 4 The PSNR values of the reconstructed images of each algorithm

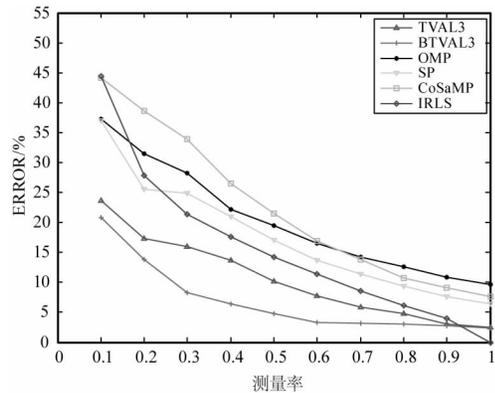


图 5 各算法重构图像 ERROR 值

Fig. 5 The ERROR values of the reconstructed images of each algorithm

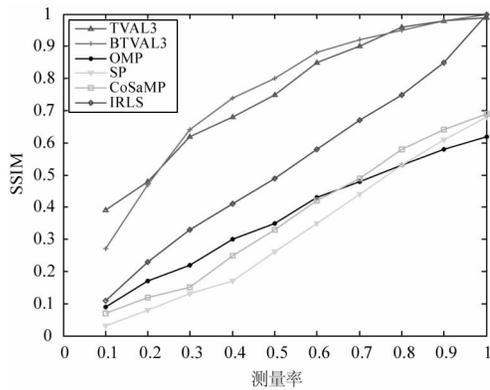


图6 各算法重构图像 SSIM 值

Fig. 6 The SSIM values of the reconstructed images of each algorithm

从图 4 ~ 6 中各算法在不同测量率下的重构图像 PSNR 值曲线、重构错误率 ERROR 曲线以及结构相似度 SSIM 曲线可以分析得出: TVAL3 算法和 BTVAL3 算法的重构性能在各测量率下优于其他典型重构算法。其中 IRLS 算法比较特殊, 在未压缩情况下重构结果优于其他算法。改进的 BTVAL3 算法重构性能相对于 TVAL3 算法而言, 各测量率下重构图像的 PSNR 值提高约 2 dB; 重构错误率在测量率小于 0.7 时下降 10% 左右, 而测量率在大于 0.7 时错误率降低 2% 左右; 结构相似度在测量率小于 0.2 时低于 TVAL3 算法, 测量率介于 0.2 和 0.7 之间时, BTVAL3 算法的结构相似度较 TV 算法相比提高 0.1 左右, 测量率大于 0.7 时则相似度相差不大。

为了更直观地表示重构效果, 在测量率为 0.2 和 0.5 时 TVAL3 算法与 BTVAL3 算法的重构结果如图 7 和图 8 所示。



图7 测量率为 0.2 时重构结果

Fig. 7 The reconstruction results when the measurement rate is 0.2

从图 7 和图 8 中可以看出, 相同测量率下 BTVAL3 算法的重构图像轮廓信息更加清晰。

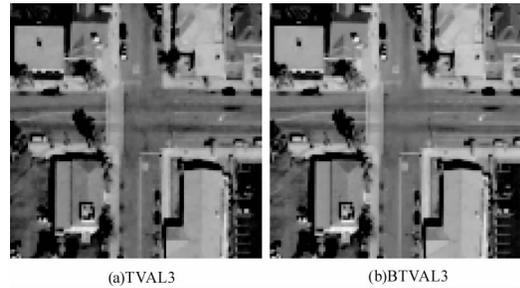


图8 测量率为 0.5 时的重构结果

Fig. 8 The reconstruction results when the measurement rate is 0.5

4.2 不同噪声水平下的重构结果

由于噪声水平会对算法的重构性能产生一定的影响, 本节对 BTVAL3 算法对噪声的鲁棒性进行了分析。根据 4.1 节可知, TVAL3 算法与 BTVAL3 算法的性能优越, 远高于其他典型算法。因此, 本节只对这两种算法在不同噪声水平下的重构结果进行了分析比较。其中, 在各测量率下的重构结果相似, 选择测量率为 0.5 时 Building 图像在高斯随机测量矩阵下不同噪声水平的重构结果如图 9 ~ 11 所示。

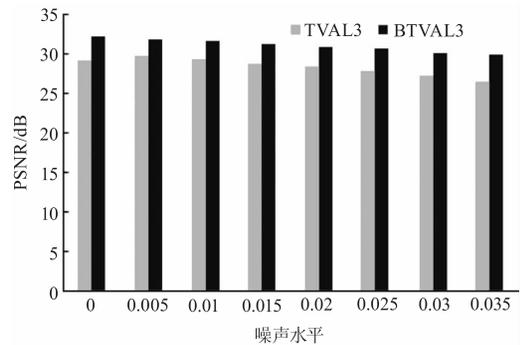


图9 不同噪声水平下重构图像 PSNR 值

Fig. 9 The PSNR values of reconstructed image at different noise levels

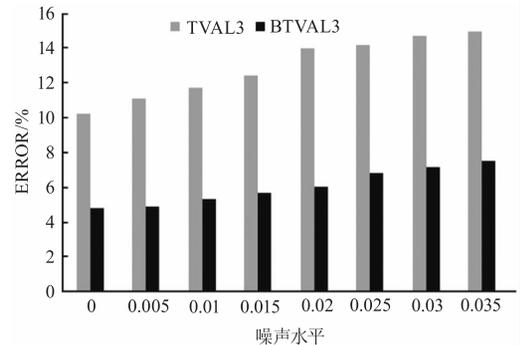


图10 不同噪声水平下重构图像 ERROR 值

Fig. 10 The ERROR values of reconstructed image at different noise levels

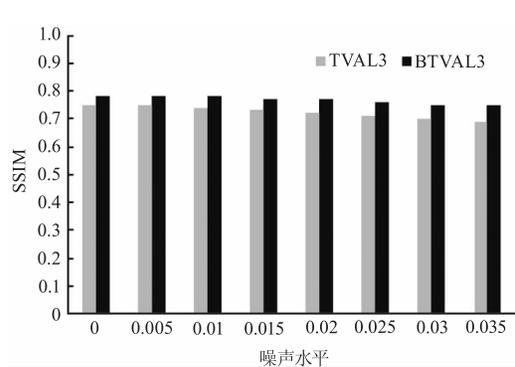


图 11 不同噪声水平下重构图像 SSIM 值

Fig. 11 The SSIM values of reconstructed image at different noise levels

从图 9 ~ 11 中 TVAL3 算法与 BTVAL3 算法在不同噪声水平下的重构图像 PSNR 值曲线、重构错误率 ERROR 曲线以及结构相似度 SSIM 曲线可以分析得出: BTVAL3 算法相对于 TVAL3 算法而言在相同测量率下随着噪声水平的提高, 重构图像的 PSNR 值降低的很小, 基本保持不变; 重构错误率增加的很缓慢, 而且重构错误率很低, 低于 TVAL3 算法 10% 左右; 结构相似度随着噪声水平的提高, 略高于 TVAL3 算法, 但是相差不明显。可以看出, BTVAL3 算法不同噪声具有更好的鲁棒性。

5 结 论

本文在 TV 算法的基础上引入双边滤波思想, 通过同时对图像像素之间的空间关系和灰度关系进行约束, 弥补了全变分正则项求解过程中对全域进行差分导致的图像边缘信息模糊的不足。求解过程中通过在目标函数中加入拉格朗日算子, 将目标函数转化为加入增广拉格朗日函数, 利用交替方向法求解该函数最小值, 迭代过程中选择梯度下降法进行求解, 可使算法得到优化, 运算速率得到提升。最后利用 MATLAB 程序进行仿真实验, 证明改进的 BTVAL3 算法相对于 TVAL3 算法能够更好地保持图像的边缘信息, 在不同测量率下重构图像的结构相似度提高了 0.1、PSNR 提高了 2 dB, 重构图像错误率降低了 10% 左右, 并且 BTVAL3 算法对噪声也具有较好的鲁棒性, 图像重构质量得到进一步提高。

参考文献:

[1] Baraniuk R. Compressive sensing[J]. IEEE Signal Proc. Mag, 2007, 24(4): 118 - 121.

- [2] Goyal V, Fletcher A, and Rangan S. Compressive sampling and lossy compression[J]. IEEE Signal Proc. Mag, 2008, 25(2): 48 - 56.
- [3] Ma J, Le Dimet F X. Deblurring from highly incomplete measurements for remote sensing[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2009, 47(3): 792 - 802.
- [4] Davis G, Mallat S, Avellaneda M. Greedy adaptive approximation[J]. Constructive Approximation, 1997, 13(1): 57 - 98.
- [5] Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, et al. Sparse Solution of Underdetermined Systems of Linear Equations by Stage-wise Orthogonal Matching Pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(2): 1094 - 1121.
- [6] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied & Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(3): 301 - 321.
- [7] S S Chen, D L Donoho, M A Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Review, 2001, 43(1): 129 - 159.
- [8] M A T Figueiredo, R D Nowak, S J Wright. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 586 - 598.
- [9] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transaction on Information Theory, 2006, 52(2): 489 - 509.
- [10] Farsiu S, Robinson M D, Elad M, et al. Fast and robust multiframe super resolution[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(10): 1327 - 1344.
- [11] SUN Xuefang, XIAO Zhiyun, SUN Lei, et al. Adaptive kernel regression super-resolution reconstruction based on bilateral total variation[J]. Computer Engineering & Applications, 2013, 49(20): 175 - 178. (in Chinese)
孙学芳, 肖志云, 孙蕾, 等. 双边全变分的自适应核回归超分辨率重建[J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(20): 175 - 178.
- [12] XU Xue. Image processing algorithms based on adaptive compressed sensing [D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2016. (in Chinese)
许雪. 基于自适应压缩感知的图像处理算法研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2016.

- [13] HUANG Qiaohao. Super-resolution image reconstruction algorithm based on lpBTV regularization [J]. Journal of Guangdong AIB Polytechnic College, 2017, (2): 59 - 62. (in Chinese)
黄巧洁. 基于 lpBTV 正则化的图像超分辨率重建算法 [J]. 广东农工商职业技术学院学报, 2017, (2): 59 - 62.
- [14] YANG Jing, LI Zheng. Detail enhancement method for infrared image based on bilateral filter [J]. Laser & Infrared, 2016, 46(4): 507 - 511. (in Chinese)
杨静, 李争. 一种基于双边滤波的红外图像细节增强方法 [J]. 激光与红外, 2016, 46(4): 507 - 511.
- [15] KANG Changqing, XU Gejing, XIANG Dongsheng, et al. Adaptive bilateral filtering algorithm based on contrast invariant features [J]. Laser & Infrared, 2013, 43 (5): 550 - 553. (in Chinese)
康长青, 徐格静, 项东升, 等. 基于亮度不变特征的自适应双边滤波算法 [J]. 激光与红外, 2013, 43 (5): 550 - 553.
- [16] LIU Yongcai, BAO Yidong, WANG Xiaoping, et al. Total variation model based bilateral filtering method of image denoising [J]. Modern Electronics Technique, 2017, 40 (17): 36 - 39. (in Chinese)
刘永财, 鲍益东, 王小平, 等. 结合全变分的双边滤波图像去噪方法研究 [J]. 现代电子技术, 2017, 40 (17): 36 - 39.
- [17] Rockafellar R T. The multiplier method of Hestenes and Powell applied to convex programming [J]. Journal of Optimization Theory & Applications, 1973, 12 (6): 555 - 562.